521. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

1 ΜΑΡΤΙΟΥ 2012

1) α) Δώστε τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας. Έστω Ο ομάδα. Για κάθε $\alpha,\beta \in O$ ορίζουμε τη σχέση $\alpha\Sigma\beta \Leftrightarrow \alpha\beta=\beta\alpha$. Εξετάστε αν αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Δικαιολογήστε. **0.5**

β) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε την πράξη $\kappa * \mu=\kappa$ για όλους τους ακεραίους κ και μ. Εξετάστε αν η πράξη είναι καλά ορισμένη και το ζεύγος $(\mathbb{Z}, *)$ αποτελεί ομάδα. Δικαιολογήστε. **0.5**

γ) Έστω η ομάδα $O=GL(2,\mathbb{R})$. Να βρείτε όλα τα στοιχεία Α της Ο ώστε ΑΒ=ΒΑ για όλα τα Β της Ο. **1**

2) α) Να δείξετε ότι το σύνολο Α αποτελεί ομάδα. Να βρείτε ένα ελάχιστο σύνολο γεννητόρων καθώς και σχέσεις μεταξύ τους. Επίσης να βρεθούν όλες οι υποομάδες της. Με ποιά γνωστή ομάδα είναι ισόμορφη;

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$ **0.5**

β) Να βρείτε όλες τις διακεκριμένες υποομάδες της $\mathbb{Z}_{30}$. **0.2**

γ) Βρείτε όλα τα δεξιά σύμπλοκα της $Y=\langle(1,2)\rangle$ στην $O=\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ και να περιγράψετε την O/Y. **0.3**

3) α) Έστω οι αντιμεταθέσεις $\alpha=(1,2)$ και $\beta=(3,4)$ της Σ_5. Δείξτε ότι η μετάθεση αβ είναι γινόμενο δύο 3-κύκλων. **0.3**

β) Να βρεθεί μετάθεση $\beta \in \Sigma_{11}$ ώστε $\beta^{-1}(1,5,3,4,7)\beta=(2,6,3,4,5)$. **0.2**

γ) Πότε μια μετάθεση καλείται άρτια; Να δείξετε ότι το σύνολο των αρτίων μεταθέσεων είναι υποομάδα της Σ_ν. **0.5**

4) α) Έστω p πρώτος, να βρεθεί το πλήθος των υποομάδων τάξης p της ομάδας $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. **1**

β) Έστω Ο και Κ πεπερασμένες ομάδες. Αν το γινόμενο $O \times K$ είναι κυκλική, τότε οι ομάδες Ο και Κ είναι κυκλικές και κάθε υποομάδα της $O\times K$ είναι μορφής $A\times B$ με $A \le O$ και $B \le K$. **1**

ΑΛΛΑΓΗ ΣΕΛΙΔΑΣ

5) α) Έστω $\varphi: O \to K$ ομομορφισμός ομάδων, τότε η τάξη $|\varphi(O)|$ διαιρεί την τάξη $|O|$. **0.5**

β) Να δώσετε τον ορισμό του ισομορφισμού μεταξύ δύο ομάδων. Να δείξετε ότι η σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός και η αντίστροφη απεικόνιση ενός ισομορφισμού είναι επίσης ισομορφισμός. **0.5**

6) α) Να εξετάσετε αν ο δακτύλιος $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ είναι ακέραια περιοχή. Να βρείτε ένα μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες διαφορετικό από ένα μέγιστο. **0.5**

β) Έστω $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ ο ομομορφισμός δακτυλίων με $\varphi(\kappa)=\kappa \bmod 6$. Να βρείτε την αντιστοιχία μεταξύ των ιδεωδών τους μέσω της φ. **1**

7) α) Έστω $\varphi: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και ο S είναι μοναδιαίος. Το σύνολο $\varphi^{-1}(\{1_S\})$ είναι ιδεώδες του R αν και μόνο αν ο S έχει μόνο ένα στοιχείο. **0.5**

β) Έστω ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbb{Q}[x]$ και το πολυώνυμο $f(x)=x^3+2x+2$. Είναι ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[x]/<f(x)>$ σώμα; Περιγράψτε τον. **1**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ